

## Exercices de mathématiques - Théorèmes - Géométrie vectorielle - Corrigés

### ge-tv.1. Angle entre deux vecteurs.

PROPOSITION 0.1. Soient  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$  et  $\alpha$  l'angle "entre la flèche reliant  $\vec{0}$  à  $\vec{x}$  et la flèche reliant  $\vec{0}$  à  $\vec{y}$ ". Alors

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \cos(\alpha) \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

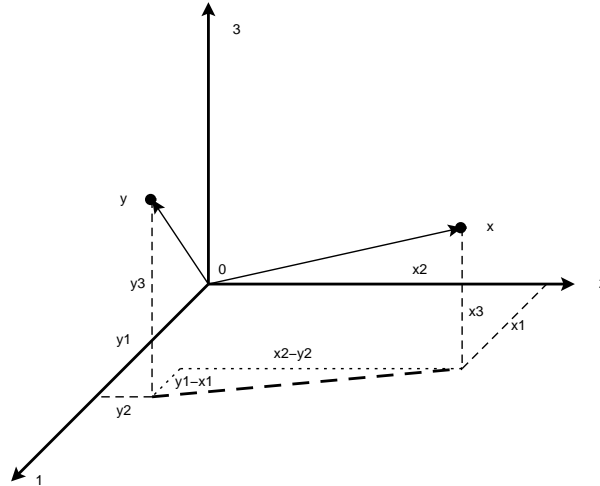


FIGURE 1. Soustraction de deux vecteurs

DÉMONSTRATION. Commençons par remarquer que

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

donne la distance euclidienne entre les points  $\vec{y}$  et  $\vec{x}$ , c'est-à-dire la longueur du segment  $[\vec{x}\vec{y}]$ . De même,  $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  donne la distance euclidienne entre  $\vec{0}$  et  $\vec{x}$ . Finalement,  $\|\vec{y}\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$  donne la distance euclidienne entre  $\vec{0}$  et  $\vec{y}$ .

Par conséquent, en appliquant le théorème du cosinus au triangle  $\vec{0}\vec{x}\vec{y}$ , nous trouvons que

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2 \cos(\alpha) \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 2 \cos(\alpha) \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| &= (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 - 2x_2y_2 + y_2^2 + x_3^2 - 2x_3y_3 + y_3^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -2 \cos(\alpha) \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| = -2x_1y_1 - 2x_2y_2 - 2x_3y_3$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| = \vec{x} \bullet \vec{y}$$

□

**ge-tv.3. Propriétés du produit vectoriel.**

PROPOSITION 0.2. Soient  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  et  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3) \in \mathbb{R}^3$ . Alors

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\alpha)$$

où  $\alpha$  est l'angle ( $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ ) entre la flèche reliant l'origine à  $\vec{a}$  et la flèche reliant l'origine à  $\vec{b}$ .

DÉMONSTRATION. Commençons par montrer que

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2$$

En effet, remarquons que

$$\begin{aligned} \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= a_2^2 b_3^2 - 2a_2 b_3 a_3 b_2 + a_3^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_1 b_3 a_3 b_1 + a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 \\ &\quad - a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - a_3^2 b_3^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 - 2a_1 b_1 a_3 b_3 - 2a_2 b_2 a_3 b_3 \\ &= a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 \\ &\quad - 2a_1 b_1 a_2 b_2 - 2a_1 b_1 a_3 b_3 - 2a_2 b_2 a_3 b_3 \\ &= \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 \end{aligned}$$

Par la formule reliant l'angle entre deux vecteurs au produit scalaire, on trouve

$$\begin{aligned} \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\cos(\alpha) \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|)^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \cos(\alpha)^2 \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 [1 - \cos(\alpha)^2] \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \sin(\alpha)^2 \end{aligned}$$

Comme  $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ , on obtient

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\alpha)$$

□

#### ge-tv.4. Propriétés du produit vectoriel.

PROPOSITION 0.3.

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \bullet \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \bullet \vec{b})\vec{c} \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

DÉMONSTRATION. Nous trouvons d'une part:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ -(b_1c_3 - b_3c_1) \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(-(b_1c_3 - b_3c_1)) \\ -[a_1(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_2c_3 - b_3c_2)] \\ a_1(-(b_1c_3 - b_3c_1)) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 + a_3b_1c_3 - a_3b_3c_1 \\ -a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 \\ -a_1b_1c_3 + a_1b_3c_1 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et d'autre part:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \bullet \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \bullet \vec{b})\vec{c} &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \\ (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_2 \\ (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1c_1b_1 + a_2c_2b_1 + a_3c_3b_1 - a_1b_1c_1 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 \\ a_1c_1b_2 + a_2c_2b_2 + a_3c_3b_2 - a_1b_1c_2 - a_2b_2c_2 - a_3b_3c_2 \\ a_1c_1b_3 + a_2c_2b_3 + a_3c_3b_3 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 - a_3b_3c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2c_2b_1 + a_3c_3b_1 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 \\ a_1c_1b_2 + a_3c_3b_2 - a_1b_1c_2 - a_3b_3c_2 \\ a_1c_1b_3 + a_2c_2b_3 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 \\ a_1b_2c_1 + a_3b_2c_3 - a_1b_1c_2 - a_3b_3c_2 \\ a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de l'égalité:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \bullet \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \bullet \vec{b})\vec{c}$$

□

**ge-tv.5. Propriétés du produit vectoriel.**

PROPOSITION 0.4. Soient  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  et  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3) \in \mathbb{R}^3$ . Alors

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2$$

DÉMONSTRATION. Remarquons que

$$\begin{aligned} \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= a_2^2 b_3^2 - 2a_2 b_3 a_3 b_2 + a_3^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_1 b_3 a_3 b_1 + a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 \\ &\quad - a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - a_3^2 b_3^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 - 2a_1 b_1 a_3 b_3 - 2a_2 b_2 a_3 b_3 \\ &= a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 \\ &\quad - 2a_1 b_1 a_2 b_2 - 2a_1 b_1 a_3 b_3 - 2a_2 b_2 a_3 b_3 \\ &= \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 \end{aligned}$$

□

**ge-tv.6. Interprétation géométrique du produit vectoriel.**

PROPOSITION 0.5. Soient  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  et  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3) \in \mathbb{R}^3$ . Alors

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2$$

DÉMONSTRATION. Remarquons que

$$\begin{aligned} \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= a_2^2 b_3^2 - 2a_2 b_3 a_3 b_2 + a_3^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_1 b_3 a_3 b_1 + a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
 &= a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 \\
 &\quad - a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 - 2a_1b_1a_2b_2 - 2a_1b_1a_3b_3 - 2a_2b_2a_3b_3 \\
 &= a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 \\
 &\quad - 2a_1b_1a_2b_2 - 2a_1b_1a_3b_3 - 2a_2b_2a_3b_3 \\
 &= \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2
 \end{aligned}$$

□

PROPOSITION 0.6. Soient  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  et  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3) \in \mathbb{R}^3$ . Alors

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\alpha)$$

où  $\alpha$  est l'angle ( $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ ) entre la flèche reliant l'origine à  $\vec{a}$  et la flèche reliant l'origine à  $\vec{b}$ .

DÉMONSTRATION. Par la formule reliant l'angle entre deux vecteurs au produit scalaire, on trouve

$$\begin{aligned}
 \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2 \\
 &= \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\cos(\alpha)\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|)^2 \\
 &= \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - \cos^2(\alpha)\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 \\
 &= \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 [1 - \cos^2(\alpha)] \\
 &= \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 \sin^2(\alpha)
 \end{aligned}$$

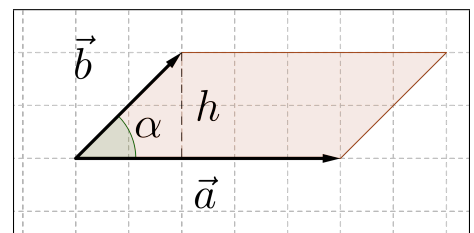
Comme  $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ , on obtient

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\alpha)$$

□

La norme du produit vectoriel  $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$  est égale à l'aire du parallélogramme construit sur  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ . En effet (voir figure ci-contre),

$$A_{\text{para}} = \text{base} \times \text{hauteur} = \|\vec{a}\| \cdot h = \|\vec{a}\| \sin(\alpha)\|\vec{b}\| = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$



### ge-tv.7. Invariance par permutations circulaires et interprétation géométrique du produit mixte.

PROPOSITION 0.7. Soient  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ . Alors

$$[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] = [\vec{b}; \vec{c}; \vec{a}] = [\vec{c}; \vec{a}; \vec{b}]$$

Le produit mixte est invariant sous permutations circulaires de ses arguments.

DÉMONSTRATION. On a

$$\begin{aligned} [\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left( \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ &= \underline{c_1 a_2 b_3} - \boxed{c_1 a_3 b_2} + \underbrace{c_2 a_3 b_1}_{-} - \underline{c_2 a_1 b_3} + \boxed{c_3 a_1 b_2} - c_3 a_2 b_1 \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} [\vec{b}; \vec{c}; \vec{a}] &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \left( \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ &= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ &= \boxed{a_1 b_2 c_3} - \underline{a_1 b_3 c_2} + \underline{a_2 b_3 c_1} - a_2 b_1 c_3 + \underbrace{a_3 b_1 c_2}_{-} - \boxed{a_3 b_2 c_1} \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] = [\vec{b}; \vec{c}; \vec{a}]$$

et par conséquent également que

$$[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] = [\vec{b}; \vec{c}; \vec{a}] = [\vec{c}; \vec{a}; \vec{b}]$$

□

### Interprétation géométrique

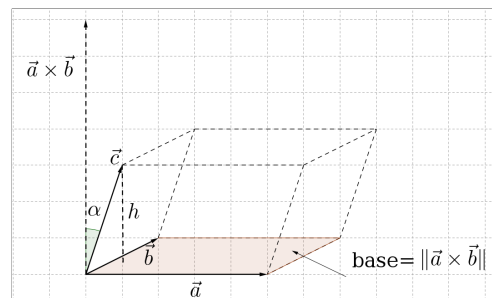
La valeur absolue du produit mixte

$$|[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}]|$$

est égale au volume du parallélépipède construit sur  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$ . En effet,

$$V_{\text{para}} = \text{base} \times \text{hauteur} = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot h$$

$$= \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cos(\alpha) = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}]|$$



**ge-tv.8. Formule reliant l'angle entre deux vecteurs et le produit vectoriel.**

PROPOSITION 0.8. Soient  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  et  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3) \in \mathbb{R}^3$ . Alors

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\alpha)$$

où  $\alpha$  est l'angle ( $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ ) entre la flèche reliant l'origine à  $\vec{a}$  et la flèche reliant l'origine à  $\vec{b}$ .

DÉMONSTRATION. Par la formule reliant l'angle entre deux vecteurs au produit scalaire, on trouve

$$\begin{aligned} \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\cos(\alpha) \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|)^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \cos^2(\alpha) \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 [1 - \cos^2(\alpha)] \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \sin^2(\alpha) \end{aligned}$$

Comme  $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ , on obtient

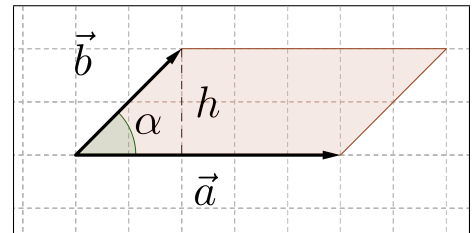
$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\alpha)$$

□

**Interprétation géométrique**

La norme du produit vectoriel  $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$  est égale à l'aire du parallélogramme construit sur  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ . En effet (voir figure ci-contre),

$$A_{\text{para}} = \text{base} \times \text{hauteur} = \|\vec{a}\| \cdot h = \|\vec{a}\| \sin(\alpha) \|\vec{b}\| = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

**ge-tv.9. Formule reliant la norme du produit vectoriel et le produit scalaire.**

PROPOSITION 0.9. Soient  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  et  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3) \in \mathbb{R}^3$ . Alors

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2$$

DÉMONSTRATION. Remarquons que

$$\begin{aligned} \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= a_2^2 b_3^2 - 2a_2 b_3 a_3 b_2 + a_3^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_1 b_3 a_3 b_1 + a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 \\ &\quad - a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 - 2a_1b_1a_2b_2 - 2a_1b_1a_3b_3 - 2a_2b_2a_3b_3 \\ &= a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 \\ &\quad - 2a_1b_1a_2b_2 - 2a_1b_1a_3b_3 - 2a_2b_2a_3b_3 \\ &= \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2\end{aligned}$$

□