

## Exercices de mathématiques - Théorèmes - Algèbre linéaire - Corrigés

### al-tl.1. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

THÉORÈME 0.1. (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soient  $\vec{x}$  et  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ . Alors, on a l'inégalité

$$|\vec{x} \bullet \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

DÉMONSTRATION. Posons

$$f(\mathbf{t}) = \|\vec{x} - \mathbf{t} \cdot \vec{y}\|^2$$

Par définition,  $f(\mathbf{t}) \geq 0$  pour tout  $\mathbf{t}$ . Remarquons que si  $\vec{y} = \vec{0}$  l'inégalité est vraie. Par conséquent, nous pouvons supposer pour la suite que  $\vec{y} \neq \vec{0}$ .

Par ailleurs, par les propriétés **B1**, **B2** et **S** du produit scalaire, nous trouvons que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{t}) &= \|\vec{x} - \mathbf{t} \cdot \vec{y}\|^2 \\ &= (\vec{x} - \mathbf{t} \cdot \vec{y}) \bullet (\vec{x} - \mathbf{t} \cdot \vec{y}) \\ &= \vec{x} \bullet \vec{x} - 2(\mathbf{t} \cdot \vec{y}) \bullet \vec{x} + \mathbf{t}^2(\vec{y} \bullet \vec{y}) \\ &= \|\vec{y}\|^2 \mathbf{t}^2 - 2(\vec{y} \bullet \vec{x})\mathbf{t} + \|\vec{x}\|^2 \\ &= a\mathbf{t}^2 + b\mathbf{t} + c \end{aligned}$$

où  $a = \|\vec{y}\|^2$ ,  $b = -2(\vec{x} \bullet \vec{y})$  et  $c = \|\vec{x}\|^2$ .

Donc le graphe de  $f$  est une parabole convexe (car  $a > 0$ ) qui coupe l'axe horizontal au plus en un seul point. Par conséquent, nous savons que le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$ . Or

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac \leq 0 &\Rightarrow (-2(\vec{x} \bullet \vec{y}))^2 - 4\|\vec{y}\|^2\|\vec{x}\|^2 \leq 0 \\ &\Rightarrow 4(\vec{x} \bullet \vec{y})^2 \leq 4\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \\ &\Rightarrow |\vec{x} \bullet \vec{y}|^2 \leq \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \\ &\Rightarrow |\vec{x} \bullet \vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \end{aligned}$$

□

### al-tl.2. Théorème des dimensions.

THÉORÈME 0.2 (Théorème des dimensions). Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application linéaire. Alors

- (1)  $\text{Ker}(f)$  est un sous-espace-vectoriel de  $\mathbb{R}^n$
- (2)  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace-vectoriel de  $\mathbb{R}^m$
- (3)  $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = n$ .

DÉMONSTRATION. (1) Soient  $\vec{x}, \vec{y} \in \text{Ker}(f)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors, comme  $f$  est linéaire,  $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ , ce qui montre que  $\vec{x} + \vec{y} \in \text{Ker}(f)$ . Par ailleurs,  $f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ , ce qui montre que  $\lambda \cdot \vec{x} \in \text{Ker}(f)$ .

- (2) Soient  $\vec{a} = f(\vec{x})$ ,  $\vec{b} = f(\vec{y}) \in \text{Im}(f)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors, comme  $f$  est linéaire,  $\vec{a} + \vec{b} = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y})$ , ce qui montre que  $\vec{a} + \vec{b} \in \text{Im}(f)$ . Par ailleurs,  $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot f(\vec{x}) = f(\lambda \cdot \vec{x})$ , ce qui montre que  $\lambda \cdot \vec{a} \in \text{Im}(f)$ .
- (3) Notons  $k = \dim(\text{Ker}(f))$ . Soit  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$  une base de  $\text{Ker}(f)$  (i.e.  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  engendrent  $\text{Ker}(f)$  et  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  sont linéairement indépendants). Si  $\text{Ker}(f) = \mathbb{R}^n$ , alors  $\text{Im}(f) = \{\vec{0}\}$  et  $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = n + 0 = n$ . Nous pouvons donc supposer que  $\text{Ker}(f) \neq \mathbb{R}^n$ .

Soit  $\vec{w}_{k+1} \in \mathbb{R}^n \setminus \text{Ker}(f)$ . Alors les vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_{k+1}$  sont linéairement indépendants. En effet, si  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{v}_i + \mu \cdot \vec{w}_{k+1} = \vec{0}$ , alors  $-\mu \cdot \vec{w}_{k+1} \in \text{Ker}(f)$ , par conséquent,  $\mu = 0$ , d'où il suit que  $\lambda_i = 0, \forall 1 \leq i \leq k$ . Notons  $V_{k+1}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  engendré par les vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_{k+1}$ . Si  $V_{k+1} \neq \mathbb{R}^n$ , alors il existe un vecteur  $\vec{w}_{k+2} \in \mathbb{R}^n \setminus V_{k+1}$ .

En itérant ce raisonnement, on montre qu'il existe  $n - k$  vecteurs  $\vec{w}_{k+1}, \dots, \vec{w}_n$  tels que les vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_{k+1}, \dots, \vec{w}_n$  forment une base de  $\mathbb{R}^n$ .

Nous terminons la démonstration en montrant que les vecteurs  $f(\vec{w}_{k+1}), \dots, f(\vec{w}_n)$  forment une base de  $\text{Im}(f)$ . Ainsi,  $\dim(\text{Im}(f)) = n - k = n - \dim(\text{Ker}(f))$ .

Comme  $f$  est linéaire, si  $\lambda_{k+1} f(\vec{w}_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(\vec{w}_n) = \vec{0}$ , alors  $f(\lambda_{k+1} \vec{w}_{k+1} + \dots + \lambda_n \vec{w}_n) = \vec{0}$ , d'où il suit que  $\lambda_{k+1} \vec{w}_{k+1} + \dots + \lambda_n \vec{w}_n \in \text{Ker}(f)$ , c'est-à-dire  $\lambda_{k+1} \vec{w}_{k+1} + \dots + \lambda_n \vec{w}_n = \mu_1 \vec{v}_1 + \dots + \mu_k \vec{v}_k$ . Par conséquent, comme les vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_{k+1}, \dots, \vec{w}_n$  sont linéairement indépendants, nous trouvons que  $\mu_1 = \dots = \mu_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$ , ce qui montre que les vecteurs  $f(\vec{w}_{k+1}), \dots, f(\vec{w}_n)$  sont linéairement indépendants.

Finalement, soit  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ . Alors,  $\vec{x} = \mu_1 \vec{v}_1 + \dots + \mu_k \vec{v}_k + \lambda_{k+1} \vec{w}_{k+1} + \dots + \lambda_n \vec{w}_n$ , ainsi,  $f(\vec{x}) = \lambda_{k+1} f(\vec{w}_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(\vec{w}_n)$ , ce qui montre que les vecteurs  $f(\vec{w}_{k+1}), \dots, f(\vec{w}_n)$  engendrent  $\text{Im}(f)$ . □

#### al-tl.4. Matrices et diagonalisation.

DÉFINITION 0.3. Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application linéaire. La matrice associée à  $f$ , notée  $A_f$ , est un tableau de nombres avec  $m$  lignes et  $n$  colonnes. Le nombre à la ligne  $i$  et la colonne  $j$  est défini par

$$[A_f]_{ij} = \vec{e}_i \bullet f(\vec{e}_j)$$

DÉFINITION 0.4. Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application linéaire. Un nombre  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  s'il existe un vecteur non nul  $\vec{v} \neq \vec{0}$  tel que

$$f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$$

On dit que  $\vec{v}$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

THÉORÈME 0.5. Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application linéaire. Un nombre  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  si et seulement si

$$|A_f - \lambda \cdot 1| = 0$$

où  $1$  désigne la matrice identité (i.e.  $1_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  et  $1_{ii} = 1$ ).

DÉMONSTRATION. Si  $\lambda$  est une valeur propre, alors il existe un vecteur  $\vec{v} \neq \vec{0}$  tel que  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ , donc  $(A - \lambda \cdot 1)\vec{v} = \vec{0}$ . Par conséquent,  $\text{Ker}(A - \lambda \cdot 1) \neq \{\vec{0}\}$ , donc  $A - \lambda \cdot 1$  n'est pas injective et son déterminant est nul.

Réciproquement, si  $|A - \lambda \cdot 1| = 0$ , alors  $A - \lambda \cdot 1$  n'est pas bijective, donc par le théorème des dimensions,  $\text{Ker}(A - \lambda \cdot 1) \neq \{\vec{0}\}$ . Par conséquent, il existe un vecteur non nul  $\vec{v} \neq \vec{0}$  tel que  $(A - \lambda \cdot 1)\vec{v} = \vec{0}$ , c'est-à-dire  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ .  $\square$

DÉFINITION 0.6. Une application linéaire  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est diagonalisable s'il existe une base  $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  constituée de vecteurs propres de  $f$ , c'est-à-dire telle que

$$f(\vec{v}_i) = \lambda_i \cdot \vec{v}_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

PROPOSITION 0.7. Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application linéaire diagonalisable et  $A_f$  sa matrice relativement à la base canonique. Notons  $B$  la matrice dont la  $j^{\text{ème}}$  colonne contient les composantes du vecteur propre  $\vec{v}_j$  de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda_j$  (i.e.  $B_{ij} = [\vec{v}_j]_i$  et  $\vec{v}_j = \sum_{k=i}^3 [\vec{v}_j]_i \vec{e}_i$ ). Alors,

$$B^{-1}A_f B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

DÉMONSTRATION. Notons  $\vec{b}_j$  la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $B$ . Alors,  $A_f \vec{b}_j = \lambda_j \vec{b}_j$ , et

$$A_f B = \begin{pmatrix} \lambda_1 B_{11} & \lambda_2 B_{12} & \lambda_3 B_{13} \\ \lambda_1 B_{21} & \lambda_2 B_{22} & \lambda_3 B_{23} \\ \lambda_1 B_{31} & \lambda_2 B_{32} & \lambda_3 B_{33} \end{pmatrix}$$

Par définition,  $B^{-1} \vec{b}_j = \vec{e}_j$ . Par conséquent,  $B^{-1} A_f \vec{b}_j = \lambda_j B^{-1} \vec{b}_j = \lambda_j \vec{e}_j$ .  $\square$

### al-tl.5. Matrices inversibles et déterminant.

DÉFINITION 0.8. Soit  $A \in M_n(K)$ . La comatrice ou matrice des cofacteurs de  $A$  est la matrice  $\tilde{A}$  dont le coefficient  $ij$  est  $(-1)^{i+j} \det(A(j, i))$ .

LEMME 0.9. On a toujours  $A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det A \cdot I_n$ .

DÉMONSTRATION. On calcule par exemple

$$(A\tilde{A})_{ij} = \sum_k (-1)^{k+j} a_{ik} \det(A(j, k)) .$$

Lorsque  $i = j$ , c'est la formule du déterminant de  $A$ , développé selon la  $i$ -ème ligne. Que se passe-t-il lorsque  $i \neq j$ ? Appelons  $B$  la matrice obtenue en remplaçant dans la matrice  $A$  la  $j$ -ème ligne par la  $i$ -ème. Alors la formule ci-dessus décrit le coefficient  $ij$  de la matrice  $B\tilde{B}$ . Or cette matrice  $B$  a deux lignes égales si bien que son déterminant est nul. Donc, pour  $i \neq j$ ,

$$\sum_k (-1)^{k+j} a_{ik} \det A(j, k) = \sum_k (-1)^{k+j} \underbrace{b_{ik}}_{=b_{jk}} \det(B(j, k)) = \det(B) = 0$$

Ceci montre que  $A \cdot \tilde{A}$  est une matrice diagonale dont tous les coefficients de la diagonale sont  $\det(A)$ .  $\square$

**THÉORÈME 0.10.** *Une matrice  $A \in M_n(K)$  est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Dans ce cas  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$ .*

**DÉMONSTRATION.** Si le déterminant de  $A$  est non-nul, la formule  $A\tilde{A} = \det(A) \cdot I_n$  permet de trouver l'inverse de  $A$ . Si  $A$  est inversible, il existe une matrice  $A^{-1}$  telle que  $AA^{-1} = I_n$ . Ainsi  $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$  et donc le déterminant de  $A$  ne peut pas être nul.  $\square$

### al-tl.6. Multiplicité algébrique et géométrique.

**THÉORÈME 0.11.** *Soit  $\alpha : V \rightarrow V$  une application linéaire et  $\lambda$  une valeur propre. Alors  $\dim E_\lambda \leq \text{mult}(\lambda)$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $e_1, \dots, e_k$  une base de  $E_\lambda$  que l'on complète en une base  $\mathcal{B}$  de  $V$ . La matrice de  $\alpha$  dans cette base est alors de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda I_k & A' \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

où  $B \in M_{n-k}(K)$ , et son polynôme caractéristique est

$$c_\alpha = \det \begin{pmatrix} tI_k - \lambda I_k & A' \\ 0 & tI_{n-k} - B \end{pmatrix} = \det((t - \lambda)I_k) \cdot \det(tI_{n-k} - B) = (t - \lambda)^k \cdot c_B$$

Ainsi  $k \leq \text{mult}(\lambda)$ .  $\square$

### al-tl.7. Critère de diagonalisation.

**THÉORÈME 0.12.** *Une matrice  $A \in M_n(K)$  est diagonalisable si et seulement si  $m_A$  est scindé et n'a que des racines simples.*

**DÉMONSTRATION.** Si  $A$  est diagonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale et nous arrangeons les valeurs propres en les groupant de sorte que

$$A \approx B = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r I_{k_r} \end{pmatrix}$$

avec les  $\lambda_i$  tous distincts. Le polynôme  $(t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_r)$  annule visiblement  $B$ , donc  $A$ . Comme les racines de  $m_A$  sont celles de  $c_A$ , le polynôme minimal est scindé et n'a que des racines simples.

Réciproquement, si  $m_A = (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_r)$ , la décomposition primaire de  $A$  donne  $K^n = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$  puisque  $\text{Ker}(A - \lambda_i I_n)$  est précisément l'espace propre  $E_{\lambda_i}$ . Il existe donc une base de  $K^n$  formée de vecteurs propres,  $A$  est diagonalisable.  $\square$

**al-tl.8. Théorie.**

**THÉORÈME 0.13 (Cayley-Hamilton).** Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Alors le polynôme caractéristique de  $A$ ,  $c_A$ , annule  $A$ , i.e.  $c_A(A)$  est la matrice nulle.

**DÉMONSTRATION.** Comme  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos,  $c_A$  est scindé et  $A$  est triangularisable. Il existe donc une matrice inversible  $S$  et une matrice  $T$  triangulaire supérieure (i.e.  $n \geq i > j \geq 1 \Rightarrow T_{ij} = 0$ ) telles que  $S^{-1}AS = T$  et donc  $A = STS^{-1}$ . De plus, comme  $A$  et  $T$  sont semblables, il suit que  $c_A = c_T$ . Par ailleurs, pour tout polynôme  $p \in \mathbb{C}[x]$ ,

$$p(A) = p(STS^{-1}) = Sp(T)S^{-1}$$

Par conséquent,  $c_A(A) = 0 \Leftrightarrow c_A(T) \Leftrightarrow c_T(T) = 0$ .

Notons  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les éléments diagonaux de  $T$ . Alors

$$c_A(t) = c_T(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n)$$

Soit

$$v_0 = \begin{pmatrix} v_{01} \\ v_{02} \\ \vdots \\ v_{0n} \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$$

un vecteur colonne. On trouve,

$$(T - \lambda_n I_n)v = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_n & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_n & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & \lambda_n - \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{01} \\ v_{02} \\ \vdots \\ v_{0n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \vdots \\ v_{1n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$$

où  $v_1$  est un vecteur colonne dont la dernière composante est nulle car la dernière ligne de  $(T - \lambda_n I_n)$  est nulle. On montre ensuite par induction que  $(T - \lambda_i I_n)$  envoie un vecteur  $v_i$  dont les  $i$  dernières composantes sont nulles sur un vecteur  $v_{i+1}$  dont les  $i + 1$  dernières composantes sont nulles:

$$\begin{pmatrix} B & * & * \\ 0 & \lambda_i - \lambda_i & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ v_{in-i} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi  $(T - \lambda_1 I_n) \cdots (T - \lambda_n I_n)v_0 = 0$  pour tout  $v_0$ , si bien que  $c_T(T)$  est la matrice nulle et donc également  $c_A(A)$ .  $\square$

**al-tl.9. Théorie.**

**THÉORÈME 0.14.** Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ . Alors  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ .

**DÉMONSTRATION.** Les colonnes  $C_k$  de la matrice produit  $C = AB$  ont pour coefficients  $c_{ik} = \sum_j a_{ij}b_{jk}$ . En d'autres termes  $C_k = \sum_j b_{jk}A_j$ . Par linéarité du déterminant on peut donc calculer

$$\det(C) = \det(C_1, \dots, C_n) = \sum_{j_1} \cdots \sum_{j_n} b_{j_1 1} \cdots b_{j_n n} \det(A_{j_1}, \dots, A_{j_n})$$

Lorsque deux indices  $j_a$  et  $j_b$  sont égaux, le déterminant est nul car deux colonnes sont identiques. Il ne reste donc que la somme sur tous les choix  $(j_1, \dots, j_n)$  d'entiers tous différents. C'est donc une somme sur toutes les permutations de  $S_n$ :

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1)1} \dots b_{\sigma(n)n} \det(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(n)})$$

On réarrange les colonnes de cette dernière matrice en effectuant une permutation  $\sigma^{-1}$ , ce qui change le signe par  $\text{sign}(\sigma)$ . Par conséquent

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) b_{\sigma(1)1} \dots b_{\sigma(n)n} \det(A_1, \dots, A_n) = \det(A) \det(B)$$

□

### al-tl.10. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

THÉORÈME 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soient  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace hermitien, et  $u, v \in V$ . Alors

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| ,$$

avec égalité si et seulement si  $u$  et  $v$  sont liés.

DÉMONSTRATION. Si  $\langle u, v \rangle = 0$ , il n'y a rien à démontrer. Supposons que  $\langle u, v \rangle \neq 0$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a

$$0 \leq \|u + \lambda v\|^2 = \|u\|^2 + \bar{\lambda} \langle u, v \rangle + \lambda \overline{\langle u, v \rangle} + |\lambda|^2 \|v\|^2 .$$

Remplaçons  $\lambda$  par

$$\lambda = x \frac{\langle u, v \rangle}{|\langle u, v \rangle|} ,$$

avec  $x \in \mathbb{R}$ . On obtient

$$\|u\|^2 + 2x|\langle u, v \rangle| + x^2\|v\|^2 \geq 0$$

Le trinôme  $p(x) = \|u\|^2 + 2x|\langle u, v \rangle| + x^2\|v\|^2$  étant de signe constant, son discriminant  $\Delta = (2|\langle u, v \rangle|)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 = 4(|\langle u, v \rangle|^2 - \|u\|\|v\|^2)$  est négatif, ce qui permet de conclure. □

### al-tl.11. Théorème du rang.

THÉORÈME 0.15 (du rang). Soit  $f : V \rightarrow W$  une application linéaire. Alors le rang de  $f$  est fini si et seulement si  $\text{Ker}(f)$  est de codimension finie. Dans ce cas  $\text{rang}(f) = \text{codim}(\text{Ker}(f))$ .

DÉMONSTRATION. Ecrivons  $V = \text{Ker}(f) \oplus U$ . Alors la restriction de  $f$  à  $U$  définit une application linéaire bijective  $g : U \rightarrow \text{Im}(f)$  (où  $g(u) = f(u)$  pour  $u \in U$ ). Ainsi

$$\text{codim}(\text{Ker}(f)) = \dim(U) = \dim(\text{Im}(f)) = \text{rang}(f)$$

□

COROLLAIRE 0.16. Soit  $f : V \rightarrow W$  une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie. Alors  $\text{rang}(f) = \dim(V) - \dim(\text{Ker}(f))$  et si  $\dim(V) = \dim(W)$ ,  $f$  est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

**al-tl.12. Théorème de Cayley-Hamilton.**

THÉORÈME 0.17. Soit  $A \in M_n(K)$ . Alors  $c_A$  annule  $A$ , i.e.  $c_A(A)$  est la matrice nulle.

DÉMONSTRATION. On effectue la preuve dans le cas où  $K$  est un corps algébriquement clos. On sait alors que  $c_A$  est scindé et que  $A$  est triangularisable. Supposons donc que  $A$  est une matrice triangulaire puisque  $f(SAS^{-1}) = Sf(A)S^{-1}$  pour tout polynôme  $f \in K[t]$ . On est dans la situation où  $c_A = (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n)$  et l'ordre choisi pour les valeurs propres sera le même que celui dans lequel elles apparaissent dans la diagonale de  $SAS^{-1}$ . Calculons à présent pour tout vecteur colonne  $X \in M_{n \times 1}(K)$ :

$$(A - \lambda_1 I_n) \dots (A - \lambda_n I_n)X = (A - \lambda_1 I_n) \dots (A - \lambda_{n-1} I_n)Y$$

où  $Y$  est un vecteur colonne dont la dernière composante est nulle car la dernière ligne de  $(A - \lambda_n I_n)$  est nulle. On montre ensuite par induction que  $(A - \lambda_i I_n)$  envoie un vecteur  $Y$  dont les  $n - i$  dernières composantes sont nulles sur un vecteur dont les  $(n - i + 1)$  dernières composantes sont nulles:

$$\begin{pmatrix} B & * & * \\ 0 & \lambda_i - \lambda_i & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ y_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi  $(A - \lambda_1 I_n) \dots (A - \lambda_n I_n)X = 0$  pour tout  $X$ , si bien que  $c_A(A)$  est la matrice nulle.

Lorsque  $K$  n'est pas algébriquement clos, il existe toujours une clôture algébrique  $K \subset \bar{K}$ . Le résultat du calcul de la matrice  $c_A(A)$  ne dépend pas du corps dans lequel on se place (un calcul de sommes et de produits de nombres réels ne donnera pas un autre résultat si on considère ces nombres comme des nombres complexes !). Dans  $M_n(\bar{K})$ , on a que  $c_A(A) = 0$  si bien que  $c_A$  annule  $A$ .  $\square$

**al-tl.13. Permutations.**

LEMME 0.18. Soient  $\sigma, \tau \in S_n$ . Alors  $\text{sign}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)}$ .

DÉMONSTRATION. Nous allons découper l'ensemble des paires  $(i, j)$  avec  $i < j$  en deux morceaux. D'une part l'ensemble  $A$  des paires  $(i, j)$  pour lesquelles  $\tau^{-1}(i) < \tau^{-1}(j)$  et d'autre part celui  $B$  des paires pour lesquelles  $\tau^{-1}(i) > \tau^{-1}(j)$ . Si nous effectuons le changement de variables  $k = \tau^{-1}(i)$  et  $m = \tau^{-1}(j)$ , les éléments de  $A$  correspondent aux paires  $\tau(k) < \tau(m)$  telles que  $k < m$ . Pour  $B$  en revanche nous posons  $k = \tau^{-1}(j)$  et  $m = \tau^{-1}(i)$ , et les paires de  $B$  correspondent aux paires  $\tau(k) > \tau(m)$  telles que  $k < m$ . Alors

$$\begin{aligned} \text{sign}(\sigma) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \prod_{(i,j) \in A} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \cdot \prod_{(i,j) \in B} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \\ &= \prod_{\substack{\tau(k) < \tau(m) \\ k < m}} \frac{\sigma(\tau(m)) - \sigma(\tau(k))}{\tau(m) - \tau(k)} \cdot \prod_{\substack{\tau(k) > \tau(m) \\ k < m}} \frac{\sigma(\tau(m)) - \sigma(\tau(k))}{\tau(m) - \tau(k)} \\ &= \prod_{1 \leq k < m \leq n} \frac{\sigma(\tau(m)) - \sigma(\tau(k))}{\tau(m) - \tau(k)} \end{aligned}$$

 $\square$

**al-tl.14. Inégalité de Cauchy-Schwarz.**

THÉORÈME 0.19 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soient  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien ou hermitien, et  $u, v \in V$ . Alors

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| ,$$

avec égalité si et seulement si  $u$  et  $v$  sont liés.

DÉMONSTRATION. Commençons par considérer le cas euclidien. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$0 \leq \|u + tv\|^2 = \|u\|^2 + 2t\langle u, v \rangle + t^2\|v\|^2 .$$

Puisque le trinôme  $p(t) = \|u\|^2 + 2t\langle u, v \rangle + t^2\|v\|^2$  est de signe constant, son discriminant  $\Delta = (2\langle u, v \rangle)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 = 4(\langle u, v \rangle^2 - \|u\|\|v\|^2)$  est négatif, ce qui permet de conclure.

Supposons maintenant que  $V$  est hermitien. Si  $\langle u, v \rangle = 0$ , il n'y a rien à démontrer. Supposons que  $\langle u, v \rangle \neq 0$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a

$$0 \leq \|u + \lambda v\|^2 = \|u\|^2 + \bar{\lambda}\langle u, v \rangle + \lambda\overline{\langle u, v \rangle} + |\lambda|^2\|v\|^2 .$$

Remplaçons  $\lambda$  par

$$\lambda = x \frac{\langle u, v \rangle}{|\langle u, v \rangle|} ,$$

avec  $x \in \mathbb{R}$ . On obtient

$$\|u\|^2 + 2x|\langle u, v \rangle| + x^2\|v\|^2 \geq 0$$

Le trinôme  $p(x) = \|u\|^2 + 2x|\langle u, v \rangle| + x^2\|v\|^2$  étant de signe constant, son discriminant  $\Delta = (2|\langle u, v \rangle|)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 = 4(|\langle u, v \rangle|^2 - \|u\|\|v\|^2)$  est négatif, ce qui permet de conclure.  $\square$

**al-tl.15. Unicité de la signature.**

THÉORÈME 0.20 (Unicité de la signature). Supposons que la matrice de  $\beta : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par rapport à une base  $G = (g_1, \dots, g_n)$  soit :

$$\begin{pmatrix} I_p & & 0 \\ & -I_q & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

et que par rapport à une autre base  $G' = (g'_1, \dots, g'_n)$  la matrice de  $\beta$  soit :

$$\begin{pmatrix} I_{p'} & & 0 \\ & -I_{q'} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Alors  $p = p'$  et  $q = q'$ . Cela implique que la signature est bien définie.

DÉMONSTRATION. • Soit  $m \in V^\perp$  et écrivons  $m = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i$ . Alors :

$$0 = \beta(m, g_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta(g_i, g_j) = \lambda_j \underbrace{\beta(g_j, g_j)}_{=\pm 1 \text{ si } 1 \leq j \leq p+q}$$

Ainsi  $\lambda_j = 0$  pour  $1 \leq j \leq p + q$ . Donc  $m = \sum_{i=p+q+1}^n \lambda_i g_i$ . Cela montre que  $V^\perp \subset \text{Vect}(g_{p+q+1}, \dots, g_n)$ . L'autre inclusion est facile car si  $p + q + 1 \leq j \leq n$ , alors  $g_j$  est orthogonal à tout vecteur de base, donc,

$$\begin{aligned} g_j \in V^\perp &\implies \text{Vect}(g_{p+q+1}, \dots, g_n) \subset V^\perp \\ &\implies V^\perp = \text{Vect}(g_{p+q+1}, \dots, g_n) \\ &\implies \dim V^\perp = r \end{aligned}$$

On applique le même argument à  $G'$  et on obtient que  $\dim V^\perp = r'$ . Donc

$$r = r'$$

- On peut supposer que  $p \geq p'$  (donc  $q \leq q'$ ). Soit  $U = \text{Vect}(g_1, \dots, g_p)$  et  $W = \text{Vect}(g'_{p'+1}, \dots, g'_n)$ . On a que  $\dim U = p$  et que  $\dim W = n - p' = q' + r' = q' + r$ . On va montrer que  $U \cap W = \{0\}$ . Soit  $v \in U \cap W$ . Alors,

$$\begin{aligned} v \in U &\implies v = \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i \\ &\implies \beta(v, v) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \lambda_i \lambda_j \beta(g_i, g_j) \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \underbrace{\beta(g_i, g_i)}_{=1 \text{ car } 1 \leq i \leq p} \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} v \in W &\implies v = \sum_{i=p'+1}^n \mu_i g_i \\ &\implies \beta(v, v) = \dots = \sum_{i=p'+1}^n \mu_i^2 \underbrace{\beta(g_i, g_i)}_{\leq 0 \text{ car } p'+1 \leq i \leq n} \leq 0 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \beta(v, v) = 0 &\implies \beta(v, v) = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 = 0 \\ &\implies \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0 \\ &\implies v = 0 \\ &\implies U \cap W = \{0\} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la somme  $U + W$  est directe et donc :

$$\begin{aligned} p + (n - p') &= \dim U + \dim W = \dim(U \oplus W) \leq \dim V = n \\ \implies p - p' &\leq 0 \\ \implies p &\leq p' \\ \implies p = p' &\text{ car } p \geq p' \\ \implies q &= q' \end{aligned}$$

□

### al-tl.16. Théorème du supplémentaire orthogonal.

PROPOSITION 0.21. Soit  $\beta : V^2 \rightarrow \mathbb{K}$  une forme bilinéaire symétrique non dégénérée d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie. Alors  $\beta$  induit un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} \hat{\beta} : V &\rightarrow V^* \\ v &\mapsto \beta(-, v) \end{aligned}$$

où pour  $v$  fixé  $\beta(-, v)$  représente la forme linéaire

$$\begin{aligned} V &\rightarrow \mathbb{K} \\ u &\mapsto \beta(u, v) \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. • On montre la linéarité de  $\hat{\beta}$ .

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \beta(-, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \\ &= \lambda_1 \beta(-, v_1) + \lambda_2 \beta(-, v_2) \\ &= \lambda_1 \hat{\beta}(v_1) + \lambda_2 \hat{\beta}(v_2) \end{aligned}$$

car  $-$  désigne n'importe quel vecteur de  $V$ .

- On montre l'injectivité de  $\hat{\beta}$ . On cherche  $\ker(\hat{\beta})$ . Soit  $v \in \ker(\hat{\beta})$ . Alors  $\beta(-, v) \equiv 0$  (forme bilinéaire nulle). Donc  $\beta(u, v) = 0, \forall u \in V$ . Donc  $v$  est orthogonal à tout  $u$  de  $V$ . Par non dégénérescence de  $\beta$  on a que  $v = 0$ . Donc  $\ker(\hat{\beta}) = \{0\}$ .
- Finalement  $\hat{\beta}$  est linéaire et injective. De plus  $\dim V = \dim V^*$ . Par le théorème du rang, on a que  $\hat{\beta}$  est bijective et donc c'est un isomorphisme.

□

COROLLAIRE 0.22. Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Si  $\beta : V^2 \rightarrow \mathbb{K}$  est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, alors toute forme linéaire sur  $V$  est du type  $\beta(-, v_0)$  pour un certain  $v_0 \in V$ .

DÉMONSTRATION. C'est une reformulation du fait que  $\hat{\beta} : V \rightarrow V^*$  est surjective:

$$\forall \gamma \in V^*, \exists v \in V \text{ tel que } \gamma = \hat{\beta}(v)$$

□

THÉORÈME 0.23 (Supplémentaire orthogonal). Soit  $\beta : V^2 \rightarrow \mathbb{K}$  une forme bilinéaire symétrique sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie. Soit  $W$  un sous espace de  $V$  et supposons que  $\beta|_{W^2} : W^2 \rightarrow \mathbb{K}$  est non dégénérée. Alors :

$$V = W \oplus W^\perp$$

- DÉMONSTRATION. • Soit  $u \in W \cap W^\perp$ . Alors  $u \in W^\perp$  et  $\beta(u, w) = 0, \forall w \in W$ . Par non dégénérescence de  $\beta|_{W^2}$  on en déduit que  $u = 0$ . Donc  $W \cap W^\perp = \{0\}$ .
- Il est évident que  $W \oplus W^\perp \subset V$ . On cherche à montrer que  $V \subset W \oplus W^\perp$ . Soit  $v \in V$ . Alors  $\beta(-, v)$  est une forme linéaire sur  $V$ . On restreint cette forme à  $W$  :  $\beta|_W(-, v) : W \rightarrow \mathbb{K}$ . C'est une forme linéaire sur  $W$ . On applique le corollaire précédent à  $W$ , à la forme bilinéaire non dégénérée restreinte à  $W$  :  $\beta|_{W^2} : W^2 \rightarrow \mathbb{K}$  et à la forme linéaire  $\beta|_W(-, v) : W \rightarrow \mathbb{K}$ . On en déduit qu'il existe un  $w_0 \in W$  tel que :

$$\beta|_W(-, v) = \beta|_W(-, w_0)$$

En d'autres termes :

$$\begin{aligned} \beta(w, v) = \beta(w, w_0), \quad \forall w \in W &\implies \beta(w, v - w_0) = 0 \quad \forall w \in W \\ &\implies v - w_0 \in W^\perp \\ &\implies v = \underbrace{w_0}_{\in W} + \underbrace{(v - w_0)}_{\in W^\perp} \end{aligned}$$

Ainsi  $V = W \oplus W^\perp$  □

### al-tl.17. Existence et unicité de l'adjoint.

DÉFINITION 0.24. Soit  $\alpha \in \mathcal{L}(V)$ . L'adjointe de  $\alpha$  est une transformation linéaire de  $V$  notée  $\alpha^*$  telle que

$$\langle \alpha(v), w \rangle = \langle v, \alpha^*(w) \rangle$$

pour tous  $v, w \in V$ .

Pour le moment nous ne savons pas si l'adjoint de  $\alpha$  existe. Par contre l'unicité est claire puisqu'un produit scalaire est une forme non dégénérée. En effet, si

$$\langle \alpha(v), w \rangle = \langle v, \alpha^*(w) \rangle = \langle v, \beta(w) \rangle, \quad \forall v, w \in V$$

alors

$$\alpha^*(w) - \beta(w) \in V^\perp = \{0\} \quad \forall w \in V \implies \alpha^* = \beta$$

Pour montrer l'existence, nous nous appuyerons sur le lemme suivant.

LEMME 0.25. Soit  $\varphi \in V^*$  une forme linéaire. Il existe alors un unique  $w \in V$  tel que  $\varphi(v) = \langle v, w \rangle$  pour tout  $v \in V$ .

DÉMONSTRATION. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt nous assure l'existence d'une base orthonormée  $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_n)$ . Posons

$$w = \sum_{j=1}^n \overline{\varphi(g_j)} g_j$$

On calcule alors  $\langle g_i, w \rangle$  en utilisant la semi-linéarité par rapport à la deuxième variable:

$$\langle g_i, w \rangle = \sum_{j=1}^n \varphi(g_j) \langle g_i, g_j \rangle = \sum_{j=1}^n \varphi(g_j) \delta_{ij} = \varphi(g_i)$$

Les formes  $\varphi$  et  $\langle -, w \rangle$  coïncident sur les vecteurs de la base  $\mathcal{G}$ , elles sont donc égales. L'unicité vient à nouveau du fait que le produit scalaire est non dégénéré (car défini positif). Si  $w'$  est

un vecteur de  $V$  tel que  $\varphi = \langle -, w' \rangle$ , alors  $\langle v, w - w' \rangle = 0$  pour tout  $v \in V$ , si bien que  $w - w' \in V^\perp = \{0\}$ .  $\square$

**THÉORÈME 0.26.** *Soit  $\alpha \in \mathcal{L}(V)$ . Alors  $\alpha$  possède une unique adjointe  $\alpha^*$ .*

**DÉMONSTRATION.** On fixe un vecteur  $w \in W$  et on considère la forme linéaire  $\langle \alpha(-), w \rangle$ . Par le lemme précédent, il existe un unique  $u \in V$  tel que

$$\langle \alpha(v), w \rangle = \langle v, u \rangle$$

On définit l'adjoint par:  $\alpha^*(w) = u$ . Nous devons donc montrer que cette formule définit une transformation linéaire de  $V$ . Calculons pour  $w_1, w_2 \in V$  et  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} \langle v, \alpha^*(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) \rangle &= \langle \alpha(v), \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \rangle \\ &= \overline{\lambda_1} \langle \alpha(v), w_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle \alpha(v), w_2 \rangle \\ &= \overline{\lambda_1} \langle v, \alpha^*(w_1) \rangle + \overline{\lambda_2} \langle v, \alpha^*(w_2) \rangle \\ &= \langle v, \lambda_1 \alpha^*(w_1) + \lambda_2 \alpha^*(w_2) \rangle \end{aligned}$$

pour tout  $v \in V$ . Par conséquent  $\alpha^*(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) - \lambda_1 \alpha^*(w_1) - \lambda_2 \alpha^*(w_2)$  est orthogonal à tout  $v \in V$ . Ce vecteur est donc nul (car un produit scalaire est non dégénéré) si bien que  $\alpha^*(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 \alpha^*(w_1) + \lambda_2 \alpha^*(w_2)$ .  $\square$

### al-tl.18. Théorème spectral.

**LEMME 0.27.** *Soit  $\lambda$  et  $\mu$  deux valeurs propres distinctes d'une transformation auto-adjointe  $\alpha: V \rightarrow V$ . Alors les espaces propres  $E_\lambda$  et  $E_\mu$  sont orthogonaux.*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $v \in E_\lambda$  et  $w \in E_\mu$ . Nous devons montrer que  $v$  et  $w$  sont orthogonaux. Calculons donc

$$\begin{aligned} \lambda \langle v, w \rangle &= \langle \lambda v, w \rangle \\ &= \langle \alpha(v), w \rangle \\ &= \langle v, \alpha(w) \rangle \\ &= \langle v, \mu w \rangle \\ &= \overline{\mu} \langle v, w \rangle \\ &= \mu \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que  $\mu$  est une valeur propre réelle dans la dernière égalité. Comme  $\lambda \neq \mu$  on doit forcément avoir que  $\langle v, w \rangle = 0$ .  $\square$

**LEMME 0.28.** *Soit  $\lambda$  une valeur propre d'une transformation linéaire auto-adjointe  $\alpha: V \rightarrow V$ . Alors l'espace propre  $E_\lambda$  et son orthogonal  $E_\lambda^\perp$  sont des sous-espaces invariants par  $\alpha$ .*

**DÉMONSTRATION.** Le fait qu'un espace propre de  $\alpha$  est invariant par  $\alpha$  est général et ne dépend pas du fait que  $\alpha$  soit auto-adjointe. Il suffit donc de voir que  $E_\lambda^\perp$  est aussi  $\alpha$ -invariant, autrement dit que  $\alpha(E_\lambda^\perp) \subset E_\lambda^\perp$ . Soit donc  $w \in E_\lambda^\perp$  alors pour tout  $v \in E_\lambda$

$$\langle \alpha(w), v \rangle = \langle w, \alpha(v) \rangle = \langle w, \lambda v \rangle = 0$$

Ceci implique que  $\alpha(w) \in E_\lambda^\perp$ .  $\square$

**THÉORÈME 0.29 (spectral).** *Soit  $V$  un espace hermitien et soit  $\alpha \in \mathcal{L}(V)$  une transformation auto-adjointe. Alors  $\alpha$  est diagonalisable. Plus précisément  $V$  admet une base orthonormée formée de vecteurs propres. De plus les espaces propres sont orthogonaux entre eux.*

**DÉMONSTRATION.** On procède par récurrence sur  $\dim(V)$ . Si  $\dim(V) = 1$  il n'y a rien à démontrer. On suppose donc le théorème démontré pour tout espace hermitien de dimension strictement plus petite que  $n$ . Soit  $V$  avec  $\dim(V) = n$ .

Par la proposition vue la semaine passée, le polynôme caractéristique  $c_\alpha(t)$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  et possède donc au moins une racine  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Le produit scalaire étant une forme non dégénérée, on a une décomposition en somme directe  $V = E_\lambda \oplus E_\lambda^\perp$ . Le lemme précédent nous autorise à considérer la restriction  $\alpha|_{E_\lambda^\perp} \in \mathcal{L}(E_\lambda^\perp)$ . Cette transformation linéaire est encore auto-adjointe. Comme  $\dim E_\lambda \geq 1$  on a que  $\dim E_\lambda^\perp < n$  et donc l'hypothèse de récurrence s'applique si bien que  $\alpha|_{E_\lambda^\perp}$  est diagonalisable. L'espace vectoriel  $E_\lambda^\perp$  se décompose donc en somme directe de sous-espaces propres

$$E_\lambda^\perp = E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$$

De plus  $E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j}$  pour tout  $i \neq j$ . Revenons maintenant à  $\alpha$ . On a une décomposition en somme directe

$$V = E_\lambda \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$$

où tous les espaces propres sont orthogonaux entre eux par le premier lemme. Pour simplifier l'écriture posons  $\lambda_1 = \lambda$ .

Choisissons pour chaque  $i$  une base orthonormée  $\mathcal{G}_i$  de  $E_{\lambda_i}$  (une telle base existe par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à l'espace hermitien  $E_{\lambda_i}$ ). On choisit enfin  $\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{G}_i$  comme base de  $V$ .

Comme les  $\mathcal{G}_i$  sont des bases orthonormées et que les espaces propres sont orthogonaux entre eux, on a que  $\mathcal{G}$  est une base orthonormée formée de vecteurs propres de  $\alpha$ .  $\square$

### al-tl.19. Rang de l'application duale.

**THÉORÈME 0.30.** *Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $K$  de dimension finie et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Alors  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est une base de  $E^*$ . Par conséquent,  $E$  et  $E^*$  ont la même dimension.*

**DÉMONSTRATION.** Commençons par montrer que  $e_1^*, \dots, e_n^*$  sont linéairement indépendants. Pour tout vecteur de base  $e_i$ , on a:

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^* = 0 &\Rightarrow (\lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^*)(e_i) = 0 \Rightarrow \lambda_1 e_1^*(e_i) + \dots + \lambda_n e_n^*(e_i) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 \delta_{1i} + \dots + \lambda_n \delta_{ni} = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \end{aligned}$$

Montrons maintenant que  $e_1^*, \dots, e_n^*$  engendrent  $E^*$ . Soit  $\phi \in E^*$  et  $x \in E$ . Notons  $\phi_i = \phi(e_i)$ . Alors,

$$\phi(x) = \phi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \phi(e_1) + \dots + x_n \phi(e_n) = x_1 \phi_1 + \dots + x_n \phi_n = \phi_1 e_1^*(x) + \dots + \phi_n e_n^*(x)$$

Par conséquent,

$$\phi = \phi(e_1) e_1^* + \dots + \phi(e_n) e_n^*$$

$\square$

**THÉORÈME 0.31.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors

$$\dim(H) + \dim(H^\circ) = \dim(E)$$

**DÉMONSTRATION.** Soit  $n = \dim(E)$ ,  $p = \dim(H)$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  telle que  $(e_1, \dots, e_p)$  soit une base de  $H$ . Soit  $\phi \in E^*$ . Alors

$$\phi = \phi_1 e_1^* + \dots + \phi_n e_n^*$$

De plus,  $\phi \in H^\circ$  si et seulement si  $\phi(x) = 0$  pour tout  $x \in H$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\phi(e_i) = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq p$ , donc si et seulement si  $\phi_1 = \dots = \phi_p = 0$ . Par conséquent,  $(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$  est une base de  $H^\circ$ , ce qui montre que  $\dim(H^\circ) = n - p$ .  $\square$

**THÉORÈME 0.32.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels et  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors

$$\text{Ker}({}^t f) = \text{Im}(f)^\circ$$

**DÉMONSTRATION.** Par définition,

$$\text{Ker}({}^t f) = \left\{ \phi \in F^* \mid {}^t f(\phi) = 0 \right\} = \left\{ \phi \in F^* \mid \phi(f) = 0 \right\}$$

Par ailleurs,

$$\text{Im}(f)^\circ = \left\{ \phi \in F^* \mid \phi(y) = 0 \forall y \in \text{Im}(f) \right\} = \left\{ \phi \in F^* \mid \phi(f(x)) = 0, \forall x \in E \right\}$$

Or, la relation  $\phi(f) = 0$  signifie  $\phi(f(x)) = 0$  pour tout  $x \in E$ .  $\square$

**THÉORÈME 0.33.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie et  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors,

$$\text{rang}(f) = \text{rang}({}^t f)$$

**DÉMONSTRATION.** Avec les résultats qui précèdent, en vertu du théorème des dimensions, nous trouvons que

$$\begin{aligned} \text{rang}(f) &= \dim(\text{Im}(f)) = \dim(f(E)) = \dim(F) - \dim(f(E)^\circ) \\ &= \dim(F) - \dim(\text{Ker}({}^t f)) = \dim(F^*) - \dim(\text{Ker}({}^t f)) = \dim(\text{Im}({}^t f)) = \text{rang}({}^t f) \end{aligned}$$

$\square$

## al-tl.20. Identités de polarisation.

**PROPOSITION 0.34 (Identité de polarisation).** Soit  $\beta$  une forme bilinéaire symétrique sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $V$  et  $Q$  la forme quadratique associée à  $\beta$ . Alors

$$\beta(u, v) = \frac{1}{2} [Q(u + v) - Q(u) - Q(v)] \quad \forall u, v \in V .$$

DÉMONSTRATION. Un simple calcul donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [Q(u+v) - Q(u) - Q(v)] &= \frac{1}{2} [\beta(u+v, u+v) - \beta(u, u) - \beta(v, v)] \\ &= \frac{1}{2} [\beta(u, u) + \beta(u, v) + \beta(v, u) + \beta(v, v) - \beta(u, u) - \beta(v, v)] \\ &= \frac{1}{2} [\beta(u, v) + \beta(v, u)] = \frac{1}{2} [\beta(u, v) + \beta(u, v)] = \beta(u, v) \end{aligned}$$

□

PROPOSITION 0.35 (**Identité de polarisation**). Soit  $\beta$  une forme hermitienne sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  et  $Q$  la forme quadratique associée à  $\beta$  (i.e.  $Q(u) = \beta(u, u)$ ). Alors

$$\beta(u, v) = \frac{1}{2} [Q(u+v) - Q(u) - Q(v)] + \frac{i}{2} [Q(u+iv) - Q(u) - Q(v)] \quad \forall u, v \in V .$$

DÉMONSTRATION. Un simple calcul donne

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} [Q(u+v) - Q(u) - Q(v)] + \frac{i}{2} [Q(u+iv) - Q(u) - Q(v)] \\ &= \frac{1}{2} [\beta(u+v, u+v) - \beta(u, u) - \beta(v, v)] + \frac{i}{2} [\beta(u+iv, u+iv) - \beta(u, u) - \beta(v, v)] \\ &= \frac{1}{2} [\beta(u, u) + \beta(u, v) + \beta(v, u) + \beta(v, v) - \beta(u, u) - \beta(v, v)] \\ &\quad + \frac{i}{2} [\beta(u, u) + \beta(u, iv) + \beta(iv, u) + \beta(iv, iv) - \beta(u, u) - \beta(v, v)] \\ &= \frac{1}{2} [\beta(u, v) + \beta(v, u)] + \frac{i}{2} [\beta(u, u) - i\beta(u, v) + i\beta(v, u) + |i|^2\beta(v, v) - \beta(u, u) - \beta(v, v)] \\ &= \frac{1}{2} [\beta(u, v) + \overline{\beta(u, v)}] + \frac{i}{2} [-i\beta(u, v) + i\overline{\beta(u, v)}] \\ &= \operatorname{Re}(\beta(u, v)) + \frac{1}{2} [\beta(u, v) - \overline{\beta(u, v)}] \\ &= \operatorname{Re}(\beta(u, v)) + i \cdot \operatorname{Im}(\beta(u, v)) = \beta(u, v) \end{aligned}$$

□

### al-tl.21. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

THÉORÈME 0.36. Soient  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien ou hermitien de dimension  $n$  et

$$(f_1, \dots, f_n)$$

une base de  $V$ . Alors il existe une base orthonormée  $(g_1, \dots, g_n)$  de  $V$  telle que pour tout  $k$ , on ait

$$\operatorname{Vect}\{g_1; \dots; g_k\} = \operatorname{Vect}\{f_1; \dots; f_k\} .$$



Alors :

$$\begin{aligned} \beta(g_1, g_1) &= \left( \frac{1}{\sqrt{|\beta(g'_1, g'_1)|}} \right)^2 \beta(g'_1, g'_1) \\ &= \frac{1}{|\beta(g'_1, g'_1)|} \beta(g'_1, g'_1) \\ &= \pm 1 \end{aligned}$$

Ce cas correspond au cas  $n = 1$ . Si  $n \geq 2$ , on va utiliser  $g_1$  pour continuer. On pose alors  $W = \text{Vect}(g_1)$ . On a que  $\beta|_W$  est non dégénérée car si  $\lambda g_1 \perp w, \forall w \in W$ , alors en particulier  $\beta(\lambda g_1, g_1) = \lambda \beta(g_1, g_1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ . On applique le théorème du supplémentaire orthogonal :  $V = W \oplus W^\perp$ . Il suit que  $\dim W^\perp = n - 1$ , et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $\beta|_{W^\perp}$ . Donc il existe une base  $(g_2, \dots, g_n)$  par rapport à laquelle  $\beta|_{W^\perp}$  a une matrice diagonale avec des 1,  $-1$  et des 0 sur la diagonale. On complète cette base en  $G = (g_1, g_2, \dots, g_n)$  qui est une base de  $V$ . Comme  $g_1 \in W$  et que  $g_2, \dots, g_n \in W^\perp$  on a que  $\beta(g_1, g_i) = 0, \forall i, 2 \leq i \leq n$ . Donc les coefficients non diagonaux de la première ligne et de la première colonne sont nuls (par symétrie). Ainsi la matrice de  $\beta$  par rapport à  $G$  est du type :

$$\left( \begin{array}{c|ccc} \beta(g_1, g_1) & 0 & \dots & 0 \\ \hline - & - & - & - \\ 0 & & \text{Matrice} & \\ \vdots & & \text{de} & \\ 0 & & \beta|_{W^\perp} & \end{array} \right)$$

On obtient donc une matrice diagonale avec des 1,  $-1$  et des 0 sur la diagonale. Il reste à changer l'ordre des vecteurs de base pour avoir une matrice du type voulu :

$$\left( \begin{array}{cc|c} I_p & 0 & \\ \hline & -I_q & \\ 0 & 0 & \end{array} \right) \begin{array}{l} \} p \\ \} q \\ \} r = n - p - q \end{array}$$

□

**THÉORÈME 0.38 (Unicité de la signature).** *Supposons que la matrice de  $\beta : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par rapport à une base  $G = (g_1, \dots, g_n)$  soit :*

$$\left( \begin{array}{cc|c} I_p & 0 & \\ \hline & -I_q & \\ 0 & 0 & \end{array} \right)$$

*et que par rapport à une autre base  $G' = (g'_1, \dots, g'_n)$  la matrice de  $\beta$  soit :*

$$\left( \begin{array}{cc|c} I_{p'} & 0 & \\ \hline & -I_{q'} & \\ 0 & 0 & \end{array} \right)$$

*Alors  $p = p'$  et  $q = q'$ . Cela implique que la signature est bien définie.*

**DÉMONSTRATION.** • Soit  $m \in V^\perp$  et écrivons  $m = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i$ . Alors :

$$0 = \beta(m, g_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta(g_i, g_j) = \lambda_j \underbrace{\beta(g_j, g_j)}_{=\pm 1 \text{ si } 1 \leq j \leq p+q}$$

Ainsi  $\lambda_j = 0$  pour  $1 \leq j \leq p+q$ . Donc  $m = \sum_{i=p+q+1}^n \lambda_i g_i$ . Cela montre que  $V^\perp \subset \text{Vect}(g_{p+q+1}, \dots, g_n)$ . L'autre inclusion est facile car si  $p+q+1 \leq j \leq n$ , alors  $g_j$  est orthogonal à tout vecteur de base, donc,

$$\begin{aligned} g_j \in V^\perp &\implies \text{Vect}(g_{p+q+1}, \dots, g_n) \subset V^\perp \\ &\implies V^\perp = \text{Vect}(g_{p+q+1}, \dots, g_n) \\ &\implies \dim V^\perp = r \end{aligned}$$

On applique le même argument à  $G'$  et on obtient que  $\dim V^\perp = r'$ . Donc

$$r = r'$$

- On peut supposer que  $p \geq p'$  (donc  $q \leq q'$ ). Soit  $U = \text{Vect}(g_1, \dots, g_p)$  et  $W = \text{Vect}(g'_{p'+1}, \dots, g'_n)$ . On a que  $\dim U = p$  et que  $\dim W = n - p' = q' + r' = q' + r$ . On va montrer que  $U \cap W = \{0\}$ . Soit  $v \in U \cap W$ . Alors,

$$\begin{aligned} v \in U &\implies v = \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i \\ &\implies \beta(v, v) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \lambda_i \lambda_j \beta(g_i, g_j) \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \underbrace{\beta(g_i, g_i)}_{=1 \text{ car } 1 \leq i \leq p} \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} v \in W &\implies v = \sum_{i=p'+1}^n \mu_i g_i \\ &\implies \beta(v, v) = \dots = \sum_{i=p'+1}^n \mu_i^2 \underbrace{\beta(g_i, g_i)}_{\leq 0 \text{ car } p'+1 \leq i \leq n} \leq 0 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \beta(v, v) = 0 &\implies \beta(v, v) = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 = 0 \\ &\implies \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0 \\ &\implies v = 0 \\ &\implies U \cap W = \{0\} \end{aligned}$$



$V = W \oplus W^\perp$ . Il suit que  $\dim W^\perp = n - 1$ , et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $\beta|_{W^\perp}$ . Donc il existe une base  $(g_2, \dots, g_n)$  par rapport à laquelle  $\beta|_{W^\perp}$  a une matrice diagonale avec des 1,  $-1$  et des 0 sur la diagonale. On complète cette base en  $G = (g_1, g_2, \dots, g_n)$  qui est une base de  $V$ . Comme  $g_1 \in W$  et que  $g_2, \dots, g_n \in W^\perp$  on a que  $\beta(g_1, g_i) = 0, \forall i, 2 \leq i \leq n$ . Donc les coefficients non diagonaux de la première ligne et de la première colonne sont nuls (par symétrie). Ainsi la matrice de  $\beta$  par rapport à  $G$  est du type :

$$\left( \begin{array}{c|ccc} \beta(g_1, g_1) & 0 & \dots & 0 \\ \hline - & - & - & - \\ 0 & & \text{Matrice} & \\ \vdots & & \text{de} & \\ 0 & & \beta|_{W^\perp} & \end{array} \right)$$

On obtient donc une matrice diagonale avec des 1,  $-1$  et des 0 sur la diagonale. Il reste à changer l'ordre des vecteurs de base pour avoir une matrice du type voulu :

$$\left( \begin{array}{ccc} I_p & & 0 \\ & -I_q & \\ 0 & & 0 \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \} p \\ \} q \\ \} r = n - p - q \end{array} \right\}$$

□

#### al-tl.24. Unicité de la signature.

**THÉORÈME 0.40 (Unicité de la signature).** *Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension finie et soit  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire symétrique. Supposons que la matrice de  $\beta$  par rapport à une base  $G = (g_1, \dots, g_n)$  soit :*

$$\left( \begin{array}{ccc} I_p & & 0 \\ & -I_q & \\ 0 & & 0 \end{array} \right)$$

et que par rapport à une autre base  $G' = (g'_1, \dots, g'_n)$  la matrice de  $\beta$  soit :

$$\left( \begin{array}{ccc} I_{p'} & & 0 \\ & -I_{q'} & \\ 0 & & 0 \end{array} \right)$$

Alors  $p = p'$  et  $q = q'$ . Cela implique que la signature est bien définie.

**DÉMONSTRATION.**

- Soit  $m \in V^\perp$  et écrivons  $m = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i$ . Alors :

$$0 = \beta(m, g_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta(g_i, g_j) = \lambda_j \underbrace{\beta(g_j, g_j)}_{=\pm 1 \text{ si } 1 \leq j \leq p+q}$$

Ainsi  $\lambda_j = 0$  pour  $1 \leq j \leq p + q$ . Donc  $m = \sum_{i=p+q+1}^n \lambda_i g_i$ . Cela montre que  $V^\perp \subset \text{Vect}(g_{p+q+1}, \dots, g_n)$ . L'autre inclusion est facile car si  $p + q + 1 \leq j \leq n$ , alors  $g_j$  est

orthogonal à tout vecteur de base, donc,

$$\begin{aligned} g_j \in V^\perp &\implies \text{Vect}(g_{p+q+1}, \dots, g_n) \subset V^\perp \\ &\implies V^\perp = \text{Vect}(g_{p+q+1}, \dots, g_n) \\ &\implies \dim V^\perp = r \end{aligned}$$

On applique le même argument à  $G'$  et on obtient que  $\dim V^\perp = r'$ . Donc

$$r = r'$$

- On peut supposer que  $p \geq p'$  (donc  $q \leq q'$ ). Soit  $U = \text{Vect}(g_1, \dots, g_p)$  et  $W = \text{Vect}(g'_{p'+1}, \dots, g'_n)$ . On a que  $\dim U = p$  et que  $\dim W = n - p' = q' + r' = q' + r$ . On va montrer que  $U \cap W = \{0\}$ . Soit  $v \in U \cap W$ . Alors,

$$\begin{aligned} v \in U &\implies v = \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i \\ &\implies \beta(v, v) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \lambda_i \lambda_j \beta(g_i, g_j) \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \underbrace{\beta(g_i, g_i)}_{=1 \text{ car } 1 \leq i \leq p} \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} v \in W &\implies v = \sum_{i=p'+1}^n \mu_i g_i \\ &\implies \beta(v, v) = \dots = \sum_{i=p'+1}^n \mu_i^2 \underbrace{\beta(g_i, g_i)}_{\leq 0 \text{ car } p'+1 \leq i \leq n} \leq 0 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \beta(v, v) = 0 &\implies \beta(v, v) = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 = 0 \\ &\implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \\ &\implies v = 0 \\ &\implies U \cap W = \{0\} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la somme  $U + W$  est directe et donc :

$$\begin{aligned} p + (n - p') &= \dim U + \dim W = \dim(U \oplus W) \leq \dim V = n \\ \implies p - p' &\leq 0 \\ \implies p &\leq p' \\ \implies p &= p' \text{ car } p \geq p' \\ \implies q &= q' \end{aligned}$$

□

**al-tl.25. Formes bilinéaires symétriques non dégénérées.**

THÉORÈME 0.41. Soit  $B$  la matrice d'une forme bilinéaire symétrique  $\beta : V^2 \rightarrow \mathbb{K}$  par rapport à une base  $F = (f_1, \dots, f_n)$  de  $V$ . Alors  $\beta$  est non dégénérée si et seulement si  $B$  est inversible (donc si  $\det(B) \neq 0$ ).

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}
 u \text{ orthogonal à tout } v \in V &\iff \beta(u, v) = 0, \quad \forall v \in V \\
 &\iff (v_1 \dots v_n) B \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = 0, \quad \forall v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K} \\
 &\iff (0 \dots 0 \underbrace{1}_{i^{\text{ème}} \text{ position}} 0 \dots 0) B \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = 0, \quad \forall i \ 1 \leq i \leq n \\
 &\iff (B_{i1} \dots B_{in}) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = 0, \quad \forall i \ 1 \leq i \leq n \\
 &\iff B \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff u \text{ est solution du système } BX = 0
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
 &\text{Le seul vecteur orthogonal à tout } v \text{ de } V \text{ est le vecteur } u = 0 \\
 \iff &\text{La seule solution du système } BX = 0 \text{ est le vecteur } u = 0 \\
 \iff &(\text{Par le théorème du rang}) \text{rang}(B) = n \\
 \iff &B \text{ est inversible} \\
 \iff &\det(B) \neq 0
 \end{aligned}$$

□

**al-tl.26. Critère de Sylvester.**

THÉORÈME 0.42 (Critère de Sylvester). Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $B$  la matrice d'une forme bilinéaire symétrique  $\beta : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$  relativement à une base. Alors,  $\beta$  est définie positive si et seulement si les  $n$  mineurs principaux dominants de  $B$  sont strictement positifs.

DÉMONSTRATION. Si  $\beta$  est définie positive, alors  $\det(B) > 0$ . En effet, en vertu du théorème de Sylvester, il existe une matrice inversible  $S$  telle que  $S^T B S = I_n$ . Par conséquent,  $1 =$

$\det(S^\top)\det(B)\det(S) = \det(S)^2\det(B)$ . Le même argument appliqué aux sous-espaces  $\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$ , pour  $1 \leq k \leq n-1$  montre que la condition est nécessaire.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. On procède par récurrence sur la dimension  $n = \dim(V)$ . Pour  $n = 1$ , c'est évident. Supposons la propriété vraie pour  $n-1$ . Soit  $W = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ . Par hypothèse de récurrence, la restriction de  $\beta$  à  $W$  est définie positive. Par conséquent, il existe une base  $(f_1, \dots, f_{n-1})$  de  $W$  par rapport à laquelle, la matrice de la restriction de  $\beta$  à  $W$  est  $I_{n-1}$ . Soit  $e_n$  le  $n$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Posons

$$f'_n = e_n - \sum_{i=1}^{n-1} \beta(e_n, f_i) f_i$$

Alors,

$$\begin{aligned} \beta(f'_n, f_j) &= \beta\left(e_n - \sum_{i=1}^{n-1} \beta(e_n, f_i) f_i, f_j\right) = \beta(e_n, f_j) - \sum_{i=1}^{n-1} \beta(e_n, f_i) \underbrace{\beta(f_i, f_j)}_{=\delta_{ij}} \\ &= \beta(e_n, f_j) - \beta(e_n, f_j) = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, relativement à la base  $(f_1, \dots, f_{n-1}, f'_n)$ , la matrice de  $\beta$  est diagonale avec  $1, \dots, 1, \beta(f'_n, f'_n)$  sur la diagonale. Par hypothèse,

$$\beta(f'_n, f'_n) = \det(S^\top B S) = \det(S)^2 \det(B) > 0$$

où  $S$  est la matrice inversible de changement de base. En posant  $f_n = \frac{f'_n}{\sqrt{\beta(f'_n, f'_n)}}$ , la matrice de  $\beta$  relativement à la base  $(f_1, \dots, f_n)$  est  $I_n$  ce qui montre que  $\beta$  est définie positive.  $\square$